Tipps zur Serie 4:

Aufgabe 4.1:

Die verallgemeinerte Kettenregel im mehrdimensionalen Raum ist eigentlich nur eine additive Verkettung der bekannten Kettenregel in jeder Variabel. Es gilt:

1-D: $$\frac{df}{dt} = \frac{d}{dt} f(x(t)) = \frac{d}{dx} f(x(t)) \frac{d}{dt} x(t) = \frac{df}{dx} \frac{dx}{dt}$$

$\rightsquigarrow$ Es wird also mit "$\frac{dx}{dx} = 1$" erweitert

Mehrdimensional:

$$\frac{df}{dt} = \frac{d}{dt} f(x(t), y(t)) = \frac{d}{dx} f(x(t), y(t)) \frac{d}{dt} x(t) + \frac{d}{dy} f(x(t), y(t)) \frac{d}{dt} y(t)$$

$$= \frac{df}{dx} \frac{dx}{dt} + \frac{df}{dy} \frac{dy}{dt}$$

Bem: Da t in jeder Variabel vorkommt, verwenden wir für die Ableitung nach t das klassische d und nicht ∂!

Tipp: Ihr müsst die Stammfunktion von e^{-t^2} nicht explizit berechnen, da wir die Ableitung nur im Punkt $t=1$ wissen wollen.

Aufgabe 4.2:

Es geht hier darum, die Kettenregel auszunutzen, um den Hauptsatz der Integral- & Differentialrechnung anwenden zu können. $\leadsto$ Nichts rechnen!

Aufgabe 4.3:

Betrachten wir zuerst einmal gleich mehrere Eigenschaften von höheren partiellen Ableitungen, denn um diese geht es in dieser Aufgabe.

Sind die partiellen Abl. $\partial_i f$ wiederum partiell diffbar, so heissen die Funktionen $\partial_{ij} f = \partial_i(\partial_j f)$ partielle Abl. 2. Ordnung von f.

$\leadsto$ Notation:

$$\partial_{ij} f = \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} = f_{x_i x_j}$$

Sind diese wiederum partiell diffbar, so kann man die part. Abl. 3. Ordnung bilden etc.

<u>Satz von Schwarz</u> (Den ihr hier erkennen solltet):

Vorausgesetzt f besitzt in einer Umgebung um $a \in \mathbb{R}^n$ die partiellen Ableitungen $\partial_i f, \partial_j f$ & $\partial_{ij} f$, ist ferner die partielle Ableitung $\partial_{ij} f$ stetig in a, so existiert auch die partielle Abl. $\partial_{ji} f$

und es gilt

$$\partial_{ij} f(a) = \partial_{ji} f(a).$$

<u>Def:</u> $f: U \to \mathbb{C}$ ($U \subset \mathbb{R}^n$ offen) heisst k-Mal stetig diffbar ($f \in C^k$), falls alle partielle Ableitungen (auch alle Mischterme!) bis zur k-ten Ordnung auf U existieren und stetig sind.

<u>Bem:</u> Wegen des Satzes von Schwarz ist die Reihenfolge der Ableitungen in $\partial_{ij} f, \partial_{ijk} f, \ldots, \partial_{ik} f$ unerheblich. (z.B. $\partial_1\partial_2\partial_3 f = \partial_1\partial_3\partial_2 f = \partial_3\partial_2\partial_1 f$). Insbesondere nennt man für $f \in C^2$ die Matrix der partiellen Abl. 2. Ordnung

$$f''(a) = H_f(a) = \begin{bmatrix} \partial_{11} f(a) & \cdots & \partial_{1n} f(a) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_{n1} f(a) & \cdots & \partial_{nn} f(a) \end{bmatrix}$$

die **Hesse(sche) Matrix**, oder 2. Abl. von f an der Stelle a. Schwarz sagt uns, dass $H_f(a) = H_f(a)^T$ symmetrisch ist!

<u>Bem:</u> Die k-ten Ableitungen sind analog durch k-Tensoren (k-dimensionale $\underbrace{n \times n \times .. \times n}_{k}$ Tabellen) beschrieben.

Bem: Der Umkehrschluss ist ebenfalls möglich, stimmen die beiden partiellen Ableitungen in einem Punkt nicht überein, so muss die part. Abl. dieser Ordnung in dem Punkt unstetig sein!

Tipp: Betrachtet in b) den Punkt $(0,0)$ gesondert.

Aufgabe 4.4:

Betrachten wir mehrdimensionale Taylorpolynome & -reihen zuerst einmal etwas genauer:

Sei $f \in C^p(U)$ (p Mal stetig diffbar auf U).

Das Taylorpolynom p-ter Ordnung von f in $a \in U$ ist definiert als (x, a Vektoren!)

$$T_p f(x,a) = \sum_{k=0}^{p} \frac{1}{k!} D^{(k)} f(a)(x-a)^k$$

$$= f(a) + \underbrace{Df(a)(x-a)}_{=\langle \nabla f(a), (x-a)\rangle} + \underbrace{\frac{1}{2} D^{(2)} f(a)(x-a)^2}_{= \frac{1}{2}(x-a)^T H_f(a)(x-a)} + \dots$$

z.B.

$$= f(x_0,y_0) + \frac{\partial}{\partial x} f(x_0,y_0)\cdot(x-x_0) + \frac{\partial}{\partial y} f(x_0,y_0)(y-y_0) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x_0,y_0)(x-x_0)^2$$

$$+ \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial y^2} f(x_0,y_0)(y-y_0)^2 + \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} f(x_0,y_0)(x-x_0)(y-y_0) + \dots$$

$\leadsto$ Mehr Glieder werden fast nie benötigt (von Hand).

$\leadsto$ Der letzte Term hat kein $\frac{1}{2}$, da $\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2}{\partial y \partial x}$ gilt.

Bem: $T_p f(x,a)$ ist ein Polynom p-ten Grades, welches f um a approximiert.

Analog definieren wir für $f \in C^\infty(U)$ die Taylorreihe

$$T_\infty f(x,a) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} D^{(k)} f(a)(x-a)^k$$

Fehlerabschätzung für das Taylorpolynom:
Analog zum 1-D Fall kann der Fehler durch das nächste Glied in einem unbekannten Entwicklungspunkt $\xi \in [a,x]$ abgeschätzt werden:

$$f(x) - T_p f(x,a) = R_{p+1}(x,a) = \frac{D^{(p+1)} f(\xi)}{(p+1)!} (x-a)^{p+1}$$

Konkret kann für das Restglied der Taylorentwicklung 1. Ordnung Folgendes geschrieben werden:

$$R_2(x,a) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2}(x_s, y_s)(x-x_0)^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} f(x_s,y_s)(y-y_0)^2$$
$$+ \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} f(x_s,y_s)(x-x_0)(y-y_0) \qquad \text{mit } s \in [0,1]$$

wobei $x_s = x_0 + s(x-x_0)$, $y_s = y_0 + s(y-y_0)$, $\xi = (x_s, y_s)$

$\Rightarrow$ Der Ausdruck muss noch geeignet abgeschätzt werden für $(x,y) \in B_r(0, \pi/2)$ mit $r = \frac{1}{4}$ und die entsprechenden (x_s, y_s).

Aufgabe 4.5:

Auch die Bestimmung von kritischen Punkten und Extremas läuft im mehrdimensionalen analog zum eindimensionalen Fall ab, einfach das wir nun einige neue Begrifflichkeiten benötigen:

Def: Sei $f: X \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Dann hat f in $a \in X$ ein lokales Maximum bzw. Minimum, falls es in X eine Umgebung U von a gibt, so dass

$$f(x) \leq f(a) \quad \text{bzw.} \quad f(x) \geq f(a) \quad \forall x \in U$$

Falls für ein solches U sogar "<" bzw. ">" gilt, so nennt man das lokale Maximum bzw. Minimum "isoliert".

Bem: Extremum = Maximum oder Minimum

Bem: Gilt die Ungleichung $\forall x \in X$, so nennt man das Extremum "global".

Notwendiges Kriterium: Hat $f: X \to \mathbb{R}$ ($X \subset \mathbb{R}^n$ off.) in $a \in U$ ($U \subset X$) ein lokales Extremum und ist f in a partiell diffbar, so gilt:

$$\partial_1 f(a) = \partial_2 f(a) = \ldots = \partial_n f(a) = 0 \iff \nabla f(a) = 0$$

__Hinreichendes Kriterium:__ Sei $f: X \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine C^2-Funktion mit $f'(a) = 0$ für ein $x \in U \subset X$.
Dann gilt:
(i) Ist $H_f(a)$ pos. def. (d.h. $\forall v \neq 0: v^T H_f(a) v > 0$) schreibe $H_f(a) \succ 0$, so hat f in a ein isoliertes lokales Minimum.
Analogon im 1-D: $f''(a) > 0$

(ii) Ist $H_f(a)$ neg. def. (d.h. $\forall v \neq 0: v^T H_f(a) v < 0$) schreibe $H_f(a) \prec 0$, so hat f in a ein isoliertes lokales Maximum.
Analogon im 1-D: $f''(a) < 0$

(iii) Ist $H_f(a)$ indefinit (d.h. $\exists v, w: v^T H_f(a) v < 0$ & $w^T H_f(a) w > 0$) $\Leftrightarrow$ $\exists$ pos. & neg. Eigenwerte) so hat f in a kein lokales Extremum.
Analogon im 1-D: $f''(a) = 0 \rightsquigarrow$ Sattelpunkt.

Im Fall $H_f(a) \succeq 0$ aber nicht $\succ 0$ bzw. $H_f(a) \preceq 0$ aber nicht $\prec 0$ $\Rightarrow$ **keine** Aussage. Dann muss die Funktion näher betrachtet werden!

Vorgehen: Um die Definitheit der Hesse-Matrix $H_f(a)$ zu berechnen, könnt ihr das aus LinAlg bekannte Hurwitz-Kriterium benutzen (Theorie Woche 11 meiner LinAlg

Übungsunterlagen). Dies dürft ihr aber nur machen, solange $H_f(a)$ symmetrisch ist, was nach dem Satz von Schwarz für $f \in C^2$ immer gilt, also falls die zweiten partiellen Ableitungen stetig sind.